

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ И ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ЭКОНОМИКИ

УДК: 330.43

ПРОКОПЬЕВ МИХАИЛ ГРИГОРЬЕВИЧ

д.э.н., главный научный сотрудник ФГБУН «Институт проблем рынка» РАН,
e-mail: mgprokopyev@yandex.ru

КАЛИБРОВКА ЭЛАСТИЧНОСТЕЙ: ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПРЕДПОСЫЛКИ И ПРАКТИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ¹

Цель работы. В исследовании рассматриваются различные аспекты задач проверки, корректировки и восстановления необходимой информации, в частности эластичностей спроса и предложения, исходя из базовых предпосылок экономической теории. **Метод.** В этих целях, исходя из условий Слуцкого (аддитивности, гомогенности и симметрии полных систем спроса и предложения), используется метод калибровки эластичностей. Метод калибровки представлен как процесс адаптации имеющихся предварительных (экспертных) оценок эластичностей теоретическим требованиям. Новая система эластичностей рассчитывается путем сведения к минимуму взвешенного квадратичного отклонения двух систем эластичностей (исходной и новой) при соблюдении ряда ограничений, в качестве которых рассматриваются условия Слуцкого. **Результаты работы.** Изложены подходы, возможности и недостатки использования метода калибровки эластичностей в прикладных экономических исследованиях. **Область применения результатов.** Особую роль калибровка эластичностей играет при разработке информационной базы в многорегиональных и многопродуктовых моделях как частичного, так и общего равновесия. Исходные наборы эластичностей по каждой стране, как правило, являются неполными и разного уровня агрегирования. Нередко их оценка проводилась исходя из различных теоретических предпосылок на базе информации за несопоставимые годы. На практике данные эластичности должны быть проверены и скорректированы, а иногда и восстановлены, исходя из основных теоретических требований, которые предъявляются к модели. Проблема калибровки эластичностей также возникает при необходимости агрегирования (деагрегирования) номенклатуры товарных групп, принятой в модели. **Выводы.** Метод калибровки не может заменить необходимость эконометрической оценки эластичностей. Тем не менее он во многих приложениях является необходимым, а иногда и единственно возможным инструментом оценки эластичностей. Особенно если речь о моделях внешней торговли, которые включают модули по отдельным странам. Исследование позволяет на конкретных примерах ознакомиться с техникой калибровки эластичностей спроса и предложения.

Ключевые слова: калибровка эластичностей, полные системы спроса.

PROKOPIEV MIKHAIL GRIGORIEVICH
Doctor of Economic Sciences, Head Research Associate of FSBIS "Institute of Market Problems"
of the RAS, e-mail: mgprokopyev@yandex.ru

CALIBRATION OF ELASTICITIES: THEORETICAL PREDISPOSITIONS AND PRACTICAL IMPLEMENTATION

The goal of the paper. The study discusses different aspects of tasks of testing, correcting and restoring the necessary information, in particular, of elasticities of supply and demand, based on the basic prerequisites of the economic theory. *The methods of performing work.* In order to achieve this, based on the conditions of Slutsky (addition, homogeneity and symmetry of full systems of supply and demand) we are using the method of calibrating elasticities. The method of calibrating is manifested as a process of adaptation of the existing preliminary (expert) evalua-

¹ Статья подготовлена при финансовой поддержке гранта РГНФ № 14-02-00205а «Количественные методы анализа влияния экономической политики на продовольственный рынок России».

tions of elasticities to the theoretical requirements. A new system of elasticities is calculated through minimizing the weighted squared deviation of two systems of elasticities (the initial and *the new ones*) when following a number of limitations that Slutsky's conditions are based on. *The results of work.* We have described the approaches, possibilities and drawbacks of using the method of calibrating elasticities in applied economic studies. *The area of application of the results.* There is a special role that calibration of elasticities plays in developing the information foundation in multi-regional and multi-product models of both partial, and general balance. The initial sets of elasticities in each country are usually not complete, and have different levels of aggregation. Their evaluation has often been performed based on different theoretical prerequisites based on the information for non-comparable years. In practice, these elasticities had to have been checked and corrected, and sometimes also restored based on the main theoretical requirements that are set forward for the model. The problem of calibration of elasticities also appears when it is necessary to aggregate (disaggregate) the classification of product groups that has been accepted in the model. *Conclusions.* The method of calibration cannot substitute the need for an econometric evaluation of elasticities. Still, in many applications, it is necessary, and sometimes it is the only possible available tool of evaluation of elasticities. Especially when we are discussing the models of foreign trade that include modules for different countries. The study allows to learn about the technique of calibration of elasticities of supply and demand using specific examples. *Keywords:* calibration of elasticities, complete systems of demand.

Введение. Эконометрическое оценивание систем спроса и предложения предполагает наличие соответствующих стационарных рядов за достаточно продолжительный период времени либо репрезентативных данных бюджетных обследований домашних хозяйств. При этом чем больше система эластичностей удовлетворяет теоретическим требованиям, тем большее количество параметров подлежит оценке. Отечественная статистика в полной мере такой информацией не обладает. Последнее приводит к необходимости использовать при разработке многопродуктовых, многорегиональных моделей имеющиеся отдельные, часто агрегированные, оценки эластичностей как отечественных, так и зарубежных авторов. Во многих случаях такие «разрозненные» показатели могут быть адаптированы для конкретных приложений. Соответствующий метод «подгонки» эластичностей получил название «калибровка».

Калибровка эластичностей является вынужденной мерой и не может служить альтернативой их непосредственной эконометрической оценке. Данный подход применим в условиях недостатка информации, если нашей целью является адаптация и восстановление эластичностей исходя из данных, полученных из разных источников. Особую роль калибровка эластичностей играет в многострановых, многопродуктовых моделях как частичного, так и общего равновесия. Исходные наборы эластичностей по каждой стране, как правило, являются не полными и разного уровня агрегирования. Нередко их оценка проводилась исходя из различных теоретических предпосылок на базе информации за несопоставимые годы. На практике данные эластичности должны быть проверены и скорректированы, а иногда и восстановлены исходя из основных теоретических требований, которые предъявляются к модели.

В широком смысле под калибровкой понимают не только процесс адаптации эластичностей, но и настройки параметров модели для последующих экспериментов исходя их условий исходного равновесия.

Методы исследования. Можно выделить три основных подхода к определению функций спроса и эконометрическому оцениванию их параметров. Первый из них основан на непосредственной спецификации явно заданных функций безотносительно к проблеме максимизации полезности репрезентативного потребителя. Во втором — функции спроса являются производными от конкретно определенных функций предпочтения, то есть прямых или косвенных функций полезности или функции издержек. И, наконец, третий подход предполагает, что уравнения спроса задаются эластичными (гибкими) функциональными формами, которые аппроксимируют неизвестные функции предпочтений. Примером функции спроса, которые формулируется безотносительно к функции предпочтений, может служить дважды логарифмическая ($\ln\text{--}\ln$) спецификация:

$$\ln Q_i = \alpha_i + \eta_i \ln I + \sum_{j=1}^n \varepsilon_{ij} \ln p_j, \quad (i=1,2,\dots,n), \quad (1)$$

где Q_i — объем спроса на товар i -го вида, η_i — эластичность спроса по доходу на i товар, ε_{ij} — эластичность спроса на товар i относительно изменений цены товара j , p_j — цена j -го товара, I — доход (совокупные расходы), α_i — параметр уравнения. На базе данной функции построены различные модификации одной из старейших — так называемой Роттердамской системы спроса.

Второй подход к эмпирическому анализу спроса сводится к спецификации уравнений спроса на базе конкретно определенных функций предпочтения. Одной из наиболее популярных форм систем спроса, которая используется для оценки эластичностей, является Система линейных расходов (LES)² [17]. Соответствующие функции спроса LES приводятся в (2):

$$Q_i = b_i + \frac{\alpha_i}{p_i} (I - \sum_{j=1}^n b_j p_j), \quad 0 < \alpha_i < 1, \quad (Q_i - b_i) > 0, \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1, \quad (i=1,2,\dots,n), \quad (2)$$

где α_i — предельная бюджетная доля³, b_i — обычно трактуют как первое приближение уровня расходов на товар i (объем потребления i -го товара, необходимый для «существования»).

Классическим примером третьего подхода является AIDS⁴. Данная система спроса [5], [14], [15] вследствие своей эластичной формы и желательных теоретических свойств получила широкое распространение в эмпирических исследованиях. Соответствующие функции спроса AIDS в терминах бюджетных долей приводятся в (4):

$$w_i = \alpha_i + \sum_j \gamma_{ij} \ln p_j + \beta_i \ln(I/P), \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1, \quad \sum_{i=1}^n \gamma_{ij} = 0, \quad \sum_{i=1}^n \beta_i = 0, \quad \gamma_{ij} = \gamma_{ji}, \quad \sum_{j=1}^n \gamma_{ij} = 0, \quad (4)$$

где α_i , γ_{ij} и β_{ij} — параметры AIDS, подлежащие эконометрической оценке, w_i — средняя бюджетная доля (доля i -го товара в совокупных расходах), P — индекс цен, который в эмпирических исследованиях, как правило, задается индексом Стоуна⁵:

Оценка эластичностей — это практически самостоятельное исследование, сравнимое по сложности с созданием конкретных прикладных моделей [1], [2], [3]. При этом их значимость во многом зависит от того, насколько система эластичностей удовлетворяет теоретическим предпосылкам, которые следуют из теории спроса и рассматриваются ниже. В эмпирических приложениях функции спроса различного уровня агрегирования оцениваются как для полных, так и частичных (неполных) бюджетов. Полная система спроса состоит из набора функций

² В основе LES лежит функция полезности Stone-Gearly:

$$U(Q) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \log(Q_i - b_i), \quad \alpha_i > 0, \quad (Q_i - b_i) > 0, \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1. \quad (3)$$

³ В LES предельные бюджетные доли являются постоянными, а именно:

$$\alpha_i = p_i \frac{\partial Q_i}{\partial I} = const. \quad (5)$$

⁴ AIDS (Almost Ideal Demand System) — «Практически Совершенная Система Спроса». Наряду с AIDS следует отметить и другие системы спроса, производные от эластичных (гибких) функциональных форм, аппроксимирующих неизвестные прямые или косвенные функции полезности либо функции издержек. В частности, Indirect Translog System и Direct Translog System [4], Normalized Quadratic Demand System [7] и другие.

⁵ Применение (4) индекса Стоуна приводит к линейной аппроксимации AIDS — LA/AIDS.

спроса для товаров или товарных групп, описывающих распределение полного бюджета в целом между ними. Полные системы спроса, согласующиеся с экономической теорией, должны удовлетворять теоретическим требованиям, включая свойства: аддитивности, гомогенности и симметрии, а также следовать закону спроса. Последние два свойства (симметрия и закон спроса) могут быть обобщены и получили название «условие неотрицательности». Данные свойства являются критериями теоретической пригодности конкретной функции спроса для моделирования потребительских предпочтений. Эти системные необходимые условия непосредственно связаны с теоретическими предпосылками, положенными в основу функции полезности. Формально они вытекают из основных свойств частных производных функций полезности по ценам и доходу.

Аддитивность (суммируемость). Аддитивность является результатом предположения, что рациональный потребитель, осуществляя свой выбор среди n товаров и максимизируя свою полезность, полностью расходует свой бюджет (или сумма расходов потребителя на все товары равняется его доходу):

$$\sum_{i=1}^n p_i h_i(p, v) = \sum_{i=1}^n p_i Q_i(p, I) = I, \tag{6}$$

где $h_i(p, v)$ — функция спроса по Хиксу, $Q_i(p, I)$ — функция спроса по Маршаллу, p — вектор цен. Из данного выражения следует, что сумма объемов спроса на соответствующие товары, обусловленные уровнем их относительных цен, равняется имеющемуся в распоряжении потребителя бюджету, т. е. полным расходам.

Условие аддитивности можно переписать в форме, получившей название агрегации Энгеля, дифференцируя обе части (6) относительно расходов I и используя определение эластичности спроса по доходу — η_i :

$$\sum_{i=1}^n w_i \eta_i = 1 \tag{7}$$

Или словами: сумма взвешенных в соответствии со средней бюджетной долей эластичностей по доходу равняется 1.

Гомогенность (однородность). Функции спроса по Хиксу гомогенны в степени ноль относительно цен⁶. В свою очередь функции спроса по Маршаллу гомогенны в степени ноль относительно цен и дохода. Другими словами, пропорциональное изменение всех цен и дохода не приводят к изменению объемов спроса или уровню полезности. Формально это значит, что для заданного $\lambda = const$, справедливо (8):

$$h(\lambda \cdot p, v) = h(p, v) \text{ и } Q(\lambda \cdot p, \lambda \cdot I) = Q(p, I). \tag{8}$$

Данное свойство часто трактуют как «отсутствие денежных иллюзий (absence of money illusion)⁷». Формально полученный результат является следствием линейной спецификации бюджетного ограничения. Для функций спроса по Маршаллу условие гомогенности, используя

⁶ Функция $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ является гомогенной в степени k , если для произвольного $\lambda = const (\lambda > 0)$ справедливо:

$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) = \lambda^k f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Функция $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется линейно гомогенной, если $k=1$. Заметим, что первая производная линейно гомогенной функции $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ является гомогенной в степени ноль, или:

$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

⁷ В широком смысле: потребитель «свободен от денежной иллюзии», если его функция избыточного спроса не меняется при равно пропорциональном изменении всех денежных цен, его реального дохода, а также и первоначального запаса денег. Хорошей иллюстрацией данного свойства служит деноминация денег в 90-х годах в РФ.

теорему Эйлера, может быть представлено в форме соответствующих эластичностей:

$$\sum_{j=1}^n \varepsilon_{ij} + \eta_i = 0 \quad (9)$$

Или сумма некомпенсированных эластичностей по цене и эластичности по доходу равняется нулю.

Закон спроса. Коэффициенты реакции спроса на изменение собственной цены (геометрически — тангенсы угла наклона кривых компенсированного спроса) и компенсированная эластичность по собственной цене ($\varepsilon_{ii}^{\bullet}$) неположительны:

$$\frac{\partial h_i}{\partial p_i} \Big|_{\bar{u}} \leq 0 \quad \text{и} \quad \varepsilon_{ii}^{\bullet} \leq 0 \quad (10)$$

Симметрия. Компенсированные перекрестные коэффициенты влияния цен являются симметричными⁸:

$$\frac{\partial h_i}{\partial p_j} \Big|_{\bar{u}} = \frac{\partial h_j}{\partial p_i} \Big|_{\bar{u}} \quad \text{или} \quad w_i \varepsilon_{ij}^{\bullet} = w_j \varepsilon_{ji}^{\bullet} \quad (11)$$

Следует отметить, что условия (6)–(11) сформулированы независимо от конкретного вида функции полезности. Теоретически они должны выполняться для всех непротиворечивых полных систем спроса. В этом смысле данные свойства являются общими и часто называются условиями Слуцкого. На практике они далеко не всегда поддерживаются реальными данными и должны тестироваться в эмпирических исследованиях.

Можно ввести понятие локально полной системы спроса, если бюджет, выделяемый на товары определенной товарной группы, фиксирован и полностью расходуется потребителем⁹. Фактически предположение о локально полных системах спроса лежит в основе моделей частичного равновесия продовольственного рынка. В этих моделях расходы на продовольствие фиксированы, а также неявно присутствует предположение о сепарабельности предпочтений потребителя между продовольствием и другими товарными группами. В ряде известных многопродуктовых моделей, в которых функции спроса оцениваются эконометрическими методами для неполных бюджетов, в отношении отдельных товарных групп допускаются теоретические предпосылки, свойственные полным системам спроса. В частности, для мяса и мясопродуктов, а также молока и молокопродуктов и некоторых других.

Результаты. Вышеперечисленные необходимые теоретические предпосылки могут быть использованы в целях калибровки соответствующих эластичностей¹⁰. Так, принимая во внимание условия Слуцкого, такие как аддитивность, гомогенность и симметрия, и используя метод наименьших квадратов, из исходной системы эластичностей, включающей имеющиеся

данные и экспертные оценки специалистов — (ε_{ij}^0 , η_i^0), формируется новая система — (ε_{ij} , η_i).

Новая система эластичностей рассчитывается путем сведения к минимуму взвешенного квадратичного отклонения двух систем эластичностей (исходной и новой) при соблюдении ряда ограничений, в качестве которых рассматриваются условия Слуцкого¹¹. Такую процедуру можно представить как процесс адаптации имеющихся предварительных (экспертных) оценок эластичностей теоретическим требованиям. К указанным ограничениям, которые накладываются на эластичности, следует также добавить ряд естественных предпосылок, ко-

⁸ Следует отметить, что сами по себе перекрестные компенсированные эластичности не являются симметричными.

⁹ Практически это значит, что совокупность товаров данной группы должна в том числе включать «прочие» товары.

¹⁰ Метод калибровки применим как для полных, так и локально полных систем спроса.

¹¹ Данный подход реализован в рамках системы моделей RATSIM [8] и ее последующих версий EPACIS [9].

торые непосредственно не вытекают из самой теории потребительского спроса. Например, целесообразно предусмотреть, чтобы товары, у которых есть близкие заменители, имели бы и сравнительно высокие эластичности по ценам, тогда как другие, не имеющие близких заместителей, обладали бы более низкими эластичностями. Такого рода допущения можно учесть в рамках количественных ограничений на искомые эластичности. Формальная запись данной задачи приводится ниже:

$$\text{Min } F(\varepsilon_{ij}, \eta_i) \tag{12}$$

где
$$F(\varepsilon_{ij}, \eta_i) = \sum_{i,j} \gamma_{ij}^p (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^0)^2 + \sum_i \gamma_i^l (\eta_i - \eta_i^0)^2 \tag{13}$$

или
$$F(\varepsilon_{ij}, \eta_i) = \sum_{i,j} \gamma_{ij}^p \frac{(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^0)^2}{(\varepsilon_{ij}^0)^2} + \sum_i \gamma_i^l \frac{(\eta_i - \eta_i^0)^2}{(\eta_i^0)^2} \tag{14}$$

при следующих условиях:

(a) аддитивности (суммируемости):

$$\sum_i \eta_i \cdot \frac{p_i^0 \cdot Q_i^0}{\sum_i p_i^0 \cdot Q_i^0} = 1 \tag{15}$$

(b) гомогенности (однородности):

$$\sum_j \varepsilon_{ij} + \eta_i = 0 \tag{16}$$

(c) симметрии¹³:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} \cdot \frac{Q_j^0}{p_i^0} \cdot \frac{p_j^0}{Q_i^0} + (\eta_j - \eta_i) \frac{p_j^0 Q_j^0}{\sum_i p_i^0 Q_i^0} \tag{17}$$

(d) предельных значений для ценовых эластичностей:

$$\varepsilon_{ij}^0 (1 - \beta_{ij}^p) \leq \varepsilon_{ij} \leq \varepsilon_{ij}^0 (1 + \beta_{ij}^p) \tag{18}$$

(e) предельных значений для эластичностей по доходу:

$$\eta_i^0 (1 - \beta_i^l) \leq \eta_i \leq \eta_i^0 (1 + \beta_i^l) \tag{19}$$

где $p_i^0(p_j^0)$ — цена потребителя на $i(j)$ товар в базовом году, $Q_i^0(Q_j^0)$ — объем потребления $i(j)$ товара в базовом году, параметры $\beta_i^l, \beta_{ij}^p, \gamma_i^l, \gamma_{ij}^p$ — непосредственно не следуют из самой теории спроса, а служат целям увеличения правдоподобности калиброванной си-

¹³Настоящая формулировка условий симметрии непосредственно следует из (11) и уравнения Слуцкого (20):

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^* - w_j \cdot \eta_i \tag{20}$$

системы спроса и задаются экзогенно, ε_{ij}^0 и η_i^0 — исходные (первоначальные) ценовые эластичности спроса и эластичности по доходу, ε_{ij} и η_i — искомые ценовые эластичности спроса и эластичности по доходу.

Данный подход может быть реализован, когда исходная функция полезности остается неизвестной или функции спроса формулируется безотносительно к функциям предпочтений, а в качестве значений ряда эластичностей рассматриваются их экспертные оценки. Основная задача калибровки такого рода эклектической системы спроса сводится к приданию ей правдоподобности.

В том случае если изначально известна конкретная система спроса, положенная в основу оценки эластичностей, основной задачей является их проверка на соответствие основным необходимым предпосылкам экономической теории спроса и, если необходимо, соответствующая корректировка. Такая проблема, как уже отмечалось выше, часто возникает при разработке многорегиональных моделей, когда информация поступает из различных источников (стран), оценки получены на основе информационных массивов за разные годы, необходима агрегация (деагрегация) исходных данных в рамках единой классификации.

Рассмотрим проблему на примере уже упомянутой *LES*. Ограничения, которые накладываются на параметры в (2), обеспечивают выполнение свойств, необходимых для непротиворечивой и полной системы спроса. Тогда процедуру калибровки можно сформулировать как решение оптимизационной задачи:

$$\begin{aligned} & \min F(\varepsilon_{ij}, \eta_i) \\ & \text{при следующем условии}^{14}: \\ & p_i Q_i^0 = p_i b_i + \alpha_i \left(I - \sum_{j=1}^n b_j p_j^0 \right), \quad i = (1, 2, \dots, n-1) \end{aligned} \quad (21)$$

А также ограничениях, которые в неявном виде отражают свойство аддитивности и гарантируют выполнение закона спроса, а именно:

свойство аддитивности:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1; \quad (22)$$

закон спроса¹⁵:

$$0 < \alpha_i < 1. \quad (23)$$

Условие (21) в том числе гарантирует выполнение свойства гомогенности в степени ноль, так как исходная функция полезности (3) является гомогенной в степени один. Условие симметрии также следует из (21). Как и в предыдущем примере, формулировка задачи включает дополнительные ограничения: (18) и (19). Переменными задачами являются искомые параметры *LES*: α_i — предельная бюджетная доля, b_i — «объемы потребления, необходимые "для

¹⁴ Условие (21) отражает характерную черту данной системы, давшей ей название — *LES* (Система линейных расходов): расходы на потребление *i*-го товара являются линейной функцией цен и дохода.

¹⁵ Компенсированная эластичность спроса по собственной цене:

$$\varepsilon_{ii}^* \equiv \frac{\partial x_i}{\partial p_i} \cdot \frac{p_i}{x_i} \Big|_{u=const} = - \frac{\alpha_i (1 - \alpha_i) \left(I - \sum_{j=1}^n p_j b_j \right)}{p_i \cdot x_i} \leq 0. \quad (27)$$

существования"». С помощью (24)–(26) приходим к искомым ценовым эластичностям и эластичностям по доходу: соответственно ε_{ij} и η_i .

По аналогии, если исходной системой спроса является *AIDS* (4), ограничения, которые накладываются на параметры данной системы, позволяют сформировать задачу калибровки эластичностей и могут служить целям их проверки, восстановления и корректировки¹⁶. В частности, группа условий (28) в неявном виде отвечает требованию аддитивности:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1, \quad \sum_i \gamma_{ij} = 0, \quad \sum_{i=1}^n \beta_i = 0. \quad (28)$$

Соответственно (29) — условию симметрии:

$$\gamma_{ij} = \gamma_{ji}. \quad (29)$$

$$\sum_{j=1}^n \gamma_{ij} = 0. \quad (30)$$

Условие гомогенности выполняется, если

Если в (4) бюджетные доли являются экзогенными, *AIDS* может быть использован для определения неизвестных параметров. Рассмотрим технику калибровки параметров *AIDS* и соответствующих эластичностей на следующем примере. Допустим, предложение некоего товара на внутреннем рынке определяется двумя источниками поступления: отечественное производство и импорт. Также предположим, что репрезентативный потребитель имеет возможность принятия решений относительно выбора между отечественной и импортной про-

дукциями¹⁷. Из литературных источников известна эластичность по доходу на импорт — η_2 . Необходимо восстановить функции спроса *AIDS* в терминах бюджетных долей и соответствующие эластичности спроса по цене, а также эластичность по доходу на отечественную продукцию.

Пусть w_1 и w_2 — бюджетные доли (доли отечественной и импортной составляющих в совокупных расходах на данный товар)¹⁸. Тогда условия (28, 29, 30) можно переписать в следующем виде:

$$w_1 = \alpha_1 + \gamma_{11} \ln p_1 + \gamma_{12} \ln p_2 + \beta_1 \ln(I/P),$$

$$w_2 = \alpha_2 + \gamma_{21} \ln p_1 + \gamma_{22} \ln p_2 + \beta_2 \ln(I/P),$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1,$$

¹⁶ Эластичности в *AIDS* определяются исходя из следующих выражений:

эластичность по доходу:

$$\eta_i = 1 + (\beta_i / w_i), \quad (31)$$

некомпенсированная эластичность спроса по собственной цене:

$$\varepsilon_{ii} = -1 + (\gamma_{ii} / w_i) - \beta_i, \quad (32)$$

некомпенсированная перекрестная эластичность спроса:

$$\varepsilon_{ij} = \gamma_{ij} / w_i - \beta_i w_j / w_i, \quad i \neq j. \quad (33)$$

¹⁷ Данные предпосылки отвечают условиям так называемой модели несовершенного замещения.

¹⁸ Сумма бюджетных долей равна 1.

$$\beta_1 + \beta_2 = 0, \tag{34}$$

$$\gamma_{12} = \gamma_{21},$$

$$\gamma_{11} + \gamma_{12} = 0,$$

$$\gamma_{21} + \gamma_{22} = 0,$$

где α_i , γ_{ij} и β_i — параметры *AIDS*, подлежащие калибровке ($i = 1, 2; j = 1, 2$). Совокупные расходы — I , индекс цен Стоуна — P , w_1 и w_2 , а также уровни соответствующих цен — P_1 и P_2 задаются условиями базисного года.

Таким образом, восемью переменным — искомым параметрам *AIDS* противопоставляются 7 независимых уравнений. Если известен (задан экзогенно) один из параметров *AIDS*, остальные неизвестные могут быть восстановлены из решения данной системы. Например, таким параметром может быть β_2 , который определяется из (31) и условий задачи. Решив систему уравнений (34), можно определить (восстановить) все параметры *AIDS*, а затем исходя из (31–33) и соответствующие эластичности. Число параметров, которые должны быть заданы экзогенно, значительно возрастает, если импортная продукция на отечественном рынке дифференцируется в зависимости от страны происхождения. В этом случае для калибровки параметров *AIDS* можно использовать оптимизационную процедуру, аналогичную приведенной выше.

Задача калибровки эластичностей со стороны предложения формально подобна процедуре, рассмотренной для систем спроса. Предпосылки, которые могут быть положены в основу калибровки, вытекают из теоретических свойств функции прибыли. В частности, так как в экономической теории функция прибыли производителя принимается гомогенной в степени один, следует, что соответствующие функции предложения на продукцию и спроса на используемые ресурсы гомогенны в степени ноль. Или умножение цен на продукцию и все используемые ресурсы на постоянный фактор не меняет уровни предложения и спроса на ресурсы до тех пор, пока их относительные цены остаются неизменными. В терминах эластичностей это значит, что сумма эластичностей предложения по цене на продукцию и спроса на ресурсы по цене на ресурсы равна нулю (38).

Второй предпосылкой, которая ниже используется в процедуре калибровки, является условие симметрии. Свойство симметрии следует из симметричности матрицы перекрестных производных второго порядка функции прибыли и в терминах эластичностей приводится в (38) и (39). Тогда задача калибровки эластичностей предложения и спроса на ресурсы формально может быть сформулирована по аналогии с задачей калибровки системы эластичностей спроса, а именно:

$$\text{Min } F(\varepsilon_{ij}), \tag{35}$$

$$\text{где } F(\varepsilon_{ij}) = \sum_{i,j} \gamma_{ij}^p (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^0)^2 \quad \text{или} \quad F(\varepsilon_{ij}) = \sum_{i,j} \gamma_{ij}^p \frac{(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^0)^2}{(\varepsilon_{ij}^0)^2} \tag{36}$$

при следующих условиях:

- (а) гомогенности (однородности):

$$\sum_j \varepsilon_{ij} = 0 \tag{37}$$

(b) симметрии:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} \cdot \frac{Q_j^0}{P_i^0} \cdot \frac{P_j^0}{Q_i^0} \tag{38}$$

если как i , так и j — индексы видов продукции либо как i , так и j — индексы видов ресурсов.

Или

$$\varepsilon_{ij} = -\varepsilon_{ji} \cdot \frac{Q_j^0}{P_i^0} \cdot \frac{P_j^0}{Q_i^0} \tag{39}$$

если один из индексов i и j — индекс видов продукции, а другой — индекс видов ресурсов.

(c) предельных значений для ценовых эластичностей:

$$\varepsilon_{ij}^0 (1 - \beta_{ij}^p) \leq \varepsilon_{ij} \leq \varepsilon_{ij}^0 (1 + \beta_{ij}^p) \tag{40}$$

где $P_i^0 (P_j^0)$ — цена на соответствующую продукцию (ресурс) в базовом году, $Q_i^0 (Q_j^0)$ — объем предложения $i(j)$ продукции либо спроса на $i(j)$ ресурс в базовом году, параметры $\beta_{ij}^p, \gamma_{ij}^p$ служат целям увеличения правдоподобности калиброванной системы эластичностей со стороны предложения и задаются экзогенно, ε_{ij}^0 — исходные эластичности предложения и спроса на ресурсы, ε_{ij} — искомые эластичности предложения и спроса на ресурсы.

Если данная задача не имеет решения, то говорят, что системные условия микроэкономической теории не могут быть выполнены при заданных на основе экспертных оценок первоначальных эластичностях со стороны предложения и допустимых границах их колебаний. То же относится и к проблеме калибровки эластичностей спроса (12–20)¹⁹.

Выводы. Сам по себе метод калибровки, конечно, не может заменить необходимость эконометрической оценки эластичностей. Тем не менее во многих приложениях является необходимым, а иногда и единственно возможным инструментом исследования. Особенно если речь идет о моделях внешней торговли, которые включают модули по отдельным странам. Очевидно, что информация, которая поступает из разных источников (стран), должна проверяться на соответствие единым теоретическим предпосылкам и затем соответствующим образом корректироваться. При этом нередко существует необходимость восстановления недостающих данных. Проблема калибровки эластичностей также возникает при необходимости агрегирования (дезагрегирования) номенклатуры товарных групп, принятой в модели.

¹⁹ Решение задачи достигается путем корректировки параметров $\beta_{ij}^p, \gamma_{ij}^p$ и/или некоторых значений из множества первоначальных эластичностей и последующего повторения процедуры калибровки.

Литература

1. Зюидов К. Х. Некоторые задачи идентификации эконометрических зависимостей. — М.: ВЦ АН СССР, 1999.
2. Петросянц В. З., Дохолян С. В., Калаева А. С. Эконометрическая модель прогнозирования и сценарные варианты модернизации региональной экономики // Региональные проблемы преобразования экономики. — 2008. — № 1. — С. 4–17.
3. Прокопьев М. Г. Оценка эластичностей замещения между импортной и отечественной продукцией // Региональные проблемы преобразования экономики. — 2007. — № 4. — С. 480–486.
4. Christensen L. R., Jorgenson D. W., Lau L. J. Transcendental Logarithmic Utility Functions // *American Economic Review*. 1975. No. 3(65). P. 367–383.
5. Deaton A., Muelibauer J. An Almost Ideal Demand System // *The American Economic Review*. 1980. No. 3(70). P. 312–326.
6. De Melo, Robinson S. Product Differentiation and Treatment of Foreign Trade in Computable General Equilibrium Models of Small Economies // *Journal of International Economics*. August 1990. 27:1/2. P. 489–497.
7. Diewert W. E., Wales T. J. (1988). Normalized Quadratic Systems of Consumer Demand Functions // *Journal of Business and Economics Statistics*. 1988. Vol. 6. P. 302–312.
8. Fock A., Weingarten P., Wahl O. and Prokopiev: First Results of Partial Equilibrium Analysis // In Russian's Agro-food Sector. Towards Truly Functioning Markets. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2000.
9. Froberg K. и другие. Отчеты ТАСИС по проекту «Поддержка создания ОАР СНГ» и последующие проекты за 1997–2000 годы. ВИАПИ РАСХН. Неопубликованные материалы.
10. Haley S. Joint Products in the SWOPSIM Modeling Framework // Staff Report No. AGES881024. Washington DC: ERS USDA, 1988.
11. Handbook of mathematical economics. Volume II // Ed. by Arrow and Intriligator. Amsterdam-New York-Oxford: North-Holland Publishing Company. P. 452.
12. Hotelling H. Engeworth's taxation paradox and the nature of demand and supply functions // *Journal of Political Economy*. 1932. No. 40. P. 517–616.
13. King B. «What is SAM?» In G. Pyatt and J. I. Round, eds., *Social Accounting Matrices: A Basis for Planning* // Washington, DC: World Bank, 1985.
14. Pashardes A. Bias in the estimation of the Almost Ideal Demand System with the Stone index approximation. // *Economic Journal*. 1993. No. 103. P. 908–915.
15. Pogany P. The Almost Ideal Demand System and its application in general equilibrium calculations // Working paper. No. 96-05-A. Office of Economics U.S. International Trade Commission. Washington, DC. 1996.
16. Roningen V. A Static World Policy Simulation (SWOPSIM) Modeling Framework // Staff Report No. AGES860625. Washington, DC. ERS USDA. 1986.
17. Richard S. Linear Expenditure Systems and Demand Analysis: An application to the Pattern of British Demand. // *The Economic Journal*. Sep. 1954. Vol. 64. No. 255. P. 511–527.
18. Theil H. The information approach to demand analysis // *Econometrica*. 1965. No. 33. P. 67–87.
19. Theil H. Theory and measurement of consumer demand. Vol. 1. Amsterdam: North-Holland. 1975.
20. Theil H. Theory and measurement of consumer demand. Vol. 2. Amsterdam: North-Holland. 1975.

References:

1. Christensen L. R., Jorgenson, D. W., Lau, L. J. Transcendental Logarithmic Utility Functions // *American Economic Review*. 1975. No. 3(65). P. 367–383.
2. Deaton A., Muelibauer J. An Almost Ideal Demand System // *The American Economic Review*. 1980. No. 3(70). P. 312–326.
3. De Melo, Robinson S. Product Differentiation and Treatment of Foreign Trade in Computable General Equilibrium Models of Small Economies // *Journal of International Economics*. August 1990. 27:1/2. P. 489–497.
4. Diewert W. E., Wales T. J. (1988). Normalized Quadratic Systems of Consumer Demand Functions // *Journal of Business and Economics Statistics*. 1988. Vol. 6. P. 302–312.
5. Fock A., Weingarten P., Wahl O. and Prokopiev: First Results of Partial Equilibrium Analysis // In Russian's Agro-food Sector. Towards Truly Functioning Markets. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2000.
6. Froberg K. и другие. Отчеты ТАСИС по проекту «Поддержка создания ОАР СНГ» и последующие проекты за 1997–2000 годы. ВИАПИ РАСХН. Неопубликованные материалы.
7. Haley S. Joint Products in the SWOPSIM Modeling Framework // Staff Report No. AGES881024. Washington DC: ERS USDA, 1988.
8. Handbook of mathematical economics. Volume II // Ed. by Arrow and Intriligator. Amsterdam-New York-Oxford: North-Holland Publishing Company. P. 452.
9. Hotelling H. Engeworth's taxation paradox and the nature of demand and supply functions // *Journal of Political Economy*. 1932. No. 40. P. 517–616.
10. King B. «What is SAM?» In G. Pyatt and J. I. Round eds. *Social Accounting Matrices: A Basis for Planning* // Washington, DC: World Bank, 1985.
11. Pashardes A. Bias in the estimation of the Almost Ideal Demand System with the Stone index approximation // *Economic Journal*. 1993. No. 103. P. 908–915.
12. Petrosyanis V. Z., Dokholyan S. V., Kalaev, A. S. Econometric model forecasting and scenarios of modernization of regional economy // *Regional problems of transformation of the economy*. 2008. No. 1. S. 4–17.

13. Pogany P. *The Almost Ideal Demand System and its application in general equilibrium calculations* // Working paper No. 96-05-A. Office of Economics U.S. International Trade Commission. Washington, DC. 1996.
14. Prokopyev M. G. *Estimation of elasticities of substitution between imported and domestic products* // Regional problems of transformation of the economy. 2007. No. 4. P. 480–486.
15. Roningen V. *A Static World Policy Simulation (SWOPSIM) Modeling Framework* // Staff Report No. AGES860625. Washington, DC. ERS USDA. 1986.
16. Richard S. *Linear Expenditure Systems and Demand Analysis: An application to the Pattern of British Demand* // The Economic Journal. Sep. 1954. Vol. 64. No. 255. P. 511–527.
17. Theil H. *The information approach to demand analysis*. // Econometrica. 1965. No. 33. P. 67–87.
18. Theil H. *Theory and measurement of consumer demand. Vol. 1.* Amsterdam: North-Holland. 1975.
19. Theil H. *Theory and measurement of consumer demand. Vol. 2.* Amsterdam: North-Holland. 1975.
20. Zoidov K. H. *Some of the tasks of identification of econometric dependencies.* M.: Computing center of the USSR Academy of Sciences, 1999.