

# ЭКОНОМИКА И УПРАВЛЕНИЕ НАРОДНЫМ ХОЗЯЙСТВОМ

---

УДК: 330.5

**МУЛЛАХМЕДОВА СВЕТЛАНА СЕРГОВЕВНА**

к.э.н., доцент кафедры менеджмента ФГБОУ ВО  
«Дагестанский государственный технический университет»  
e-mail: sweta0606@list.ru

**ШАХПАЗОВА РАМСИЯТ ДЕМИРОВНА**

к.э.н., доцент, доцент кафедры менеджмента ФГБОУ ВО  
«Дагестанский государственный технический университет»  
e-mail: ramsiyat.sh@yandex.ru

**САРАЛИНОВА ДЖАМИЛЯ САЙДУЛАЕВНА**

к.э.н., доцент кафедры государственного и муниципального управления  
ФГБОУ ВО «Чеченский государственный университет»,  
e-mail: dss512@mail.ru

**ОМАРОВ ЗАУР ЗАЛУМХАНОВИЧ**

к.э.н., доцент кафедры Экономики и Управления МФ МАДИ, доцент кафедры  
Экономических дисциплин, филиал ФГБОУ ВО «Дагестанский  
государственный университет», г. Хасавюрт, e-mail: econ77@mail.ru

## МОДЕЛЬ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА Р.СОЛОУ: ГЕНЕЗИС ТЕОРИИ И МЕТОДОЛОГИИ

**Аннотация. Предмет исследования:** генезис теоретико-методологических основ анализа факторов экономического роста на основе модели Р. Солоу. **Цель научной статьи:** критический обзор литературы по эндогенному росту и интегральная оценка актуальности методологических подходов к проблеме верификации факторов роста экономики в отдельных модификациях модели Р. Солоу. **Методология исследования:** различные спецификации моделей эндогенного роста, основная и расширенная модели Солоу-Кобба-Дугласа, расширенная модель Солоу-CES, модель перекрывающихся поколений. **Результаты исследования:** спецификация моделей Солоу-Кобба-Дугласа и Солоу-CES. **Область практического применения результатов:** расширенная модель Р. Солоу применима для эконометрического моделирования роста экономики и составления прогнозов социально-экономического развития регионов. **Выводы.** Представленные методологические подходы к оценке вкладов разных факторов роста экономики расширяют научный горизонт поиска оптимальной модели экономического роста с учетом специфики разных стран и регионов. **Ключевые слова:** экономический рост, базовая модель Р. Солоу, расширенная модель Солоу-Кобба-Дугласа и Солоу-CES.

---

**MULLAHMEDOVA SVETLANA SERGOYEVNA**

Ph. D., associate Professor of management doctor of  
Dagestan state technical University  
e-mail: sweta0606@list.ru

**SHAKHPAZOVA RAMSIYAT DEMIROVNA**

Ph. D., associate Professor, Department of management of the  
Dagestan state technical University  
e-mail: ramsiyat.sh@yandex.ru

**SARALINOVA JAMILYA SAYDULAEVNA**

*Ph. D. in Economics, associate Professor of the Department of state and municipal management  
Of the "Chechen state University",  
e-mail: dss512@mail.ru*

**OMAROV ZAUR ZALUMKHANOVICH**

*Ph. D., associate Professor of Economics and Management, MF MADI, associate Professor  
Economic disciplines, branch of fgbou VO "Dagestansky state University", Khasavyurt,  
e-mail: econ77@mail.ru*

## SOLOW'S ECONOMIC GROWTH MODEL: GENESIS OF THEORY AND METHODOLOGY

**Abstract. Subject of research:** the Genesis of theoretical and methodological foundations for the analysis of economic growth factors based on the model of R. Solow. **The purpose of the scientific article:** a critical review of the literature on endogenous growth and an integral assessment of the relevance of methodological approaches to the problem of verification of economic growth factors in certain modifications of The Solow model. **Research methodology:** various specifications of endogenous growth models, basic and extended Solow-Cobb-Douglas models, extended Solow-CES model, overlapping generation model. **Research results:** specification of Solow-Cobb-Douglas and Solow-CES models. **Scope of practical application of the results:** the extended Solow model is applicable for econometric modeling of economic growth and making forecasts of socio-economic development of regions. **Conclusions.** The presented methodological approaches to assessing the contributions of various economic growth factors expand the scientific horizon of searching for an optimal model of economic growth, taking into account the specifics of different countries and regions.

**Keywords:** economic growth, R. Solow's basic model, extended Solow model–Cobb-Douglas and Solow-CES.

**Введение.** В экономической литературе оценку вклада разных факторов роста связывают с неоклассической моделью роста Р. Солоу [1, с. 65–94] и Т. Swan [2, с. 334–361].

Следует отметить, что в модели Harrod – Domar устойчивый рост был нестабильным. В связи с чем термин того времени «острие ножа» предполагал, что любое отклонение приведет к дальнейшему отходу от устойчивого роста. Однако R. Solow [1, с. 65–94], Т. Swan [2, с. 334–361] и, чуть позже, Джеймс Э. Меада (1961) оспорили этот вывод, утверждая, что соотношение между капиталом и объемом производства в модели Харрода – Домара не следует рассматривать экзогенно. Фактически они предложили модель роста, в которой отношение капитала к выпуску было именно корректирующей переменной, которая приведет систему обратно к ее устойчивому состоянию роста. Модель получила известное название «неоклассическая» модель роста Solow – Swan. В дальнейшем предпринимались многочисленные попытки ее модификации. Рассмотрим основные этапы расширения модели роста Solow.

В последних работах W. Brock и S. Durlauf [3; 4, с. 64–111], Collier P., Jan W. Gunning [4, с. 64–111] и S. Durlauf [5, с. 65–69] утверждается, что в модели линейной регрессии Mankiw, Romer и Weil (1992) (далее MRW), основанной на модели Solow [1, с. 65–94], предполагается сильное допущение однородности факторов роста. Допущение однородности параметров в регрессиях роста эквивалентно предположению, что все страны имеют одинаковую совокупную производственную функцию *Кобба–Дугласа* (CD). Это явно неправдоподобное предположение, поскольку в литературе по эмпирическому или теоретическому росту ничего не говорится о том, что влияние конкретной переменной (например, образования или нормы сбережений) на экономический рост одинаково во всех странах. По словам W. Brock и S. Durlauf, предположение об однородности параметров кажется особенно неуместным при изучении сложных разнородных объектов, таких, как страны.

Не удивительно, что нескольких эмпирических исследований, включая S. Durlauf и P. Johnson [6, с. 365–84], C. Liu и Т. Stengos [7, с. 527–538], S. Durlauf, A. Kourtellos и A. Minkin [8, с. 928–940], A. Kourtellos [9] содержится убедительное доказательство в пользу параметра неоднородности, несмотря на их различные методологические подходы. Параметр неоднородность

в регрессиях роста имеет несколько интерпретаций нелинейности процесса роста.

Так, С. Azariadis и Drazen [10], S. Durlauf [11, с. 349–366], О. Galor и J. Zeira [12, с. 35–52] предполагают, что параметры линейной регрессии роста не будут постоянными в разных странах. Последние исследования показывают, что введение новых переменных в стандартную модель роста Р. Солоу может привести к нелинейности во многих устойчивых состояниях и к ловушкам бедности [13, с.235–308].

### Теоретические и методологические аспекты формирования модели Solow

В 1957 г. Р. Солоу сформировал методологическую основу эмпирического тестирования неоклассической модели, которая впоследствии получила известность как метод «учета роста Р. Солоу», согласно которому наблюдаемые темпы роста ВВП разбиваются на вклады от изменений в количестве физического капитала, количестве трудозатрат и некоторых других необъяснимых факторов. Учет роста Р. Солоу по-прежнему имеет большое значение как в академической теории, так и в политическом анализе. В то время как такие институты, как МВФ, ОЭСР или Европейская комиссия, применяют метод учета роста для анализа развития технического прогресса и капиталоемкости производства в разных странах, ученые пытаются еще больше разложить «остаток Р. Солоу». Основное внимание здесь уделяется разложению роста не только на изменения количества двух входных данных, но также на изменения качества капитала и рабочей силы.

Декомпозиция роста экономики, согласно Р. Солоу, построена на стандартной неоклассической производственной функции, где продукция периода  $t$ ,  $Y_t$ , создается комбинацией капитала  $K_t$  и трудовой  $L_t$ .  $A_t$  представляет уровень «технологии» в экономике и часто называют «общей факторной производительностью» ( $TFP$ ):

$$Y = A_t F(K_t, L_t) \quad (1)$$

Формулу (1) можно упростить и представить следующим образом:

$$\dot{Y}/Y = \dot{A}/A + \left(\frac{AF_K K}{Y}\right) * \dot{K}/K + \left(\frac{AF_L L}{Y}\right) * \dot{L}/L \quad (2)$$

Если допустить, что  $\alpha$  является долей дохода от капитала, то мы можем переписать уравнение (2) как

$$\dot{Y}/Y = \dot{A}/A + \alpha \dot{K}/K + (1 - \alpha) \dot{L}/L \quad (3)$$

Выше представлено условное разложение уравнения Р. Солоу, когда практически все переменные известны, кроме  $TFP$  и его изменения во времени. Для эмпирического анализа нам нужно переформулировать уравнение в дискретном времени:

$$\frac{Y_{t+1} - Y_t}{Y_t} = \frac{A_{t+1} - A_t}{A_t} + \alpha_{t+1} \frac{K_{t+1} - K_t}{K_t} + (1 - \alpha_{t+1}) \frac{L_{t+1} - L_t}{L_t} \quad (4)$$

Это основное уравнение, которое называется стандартной моделью Р. Солоу, учитывающее колебания в долях факторного дохода, так как построено на стандартной неоклассической производственной функции Кобба–Дугласа. В дальнейшем вводятся поправки в стандартную модель, разделяя трудовой вклад на популяционный компонент, структурный компонент и т. д.

В этой связи следует отметить, что производственная функция Кобба–Дугласа является лишь частным случаем стандартной неоклассической производственной функции, предполагающей точное соотношение между выпуском и затратами. Это означает, что учет роста Р. Солоу в производственной функции Кобба–Дугласа действителен только в том случае, если данные фактически подтверждают временную неизменность долей фактора. Чтобы обойти эту проблему, можно использовать стандартную неоклассическую производственную функцию для учета роста Р. Солоу вместо производственной функции Кобба–Дугласа, что делает анализ «более общим в том смысле, что доли [дохода] могут меняться со временем» [14, с. 434].

Пересмотр стандартной модели международного движения капитала инициирует новые методы анализа. Пусть  $k$  – физический капитал на душу населения. При этом одинаковы по величине активы на душу населения и  $z$  – инвестиции на душу населения в экономику дугой

страны. Таким образом,  $k = \alpha - z$ .

Предположим, что выпуск на душу населения  $f(k)$ , который является интенсивной формой неоклассической производственной функции и  $f'(k) > 0$ , и  $f''(k) < 0$ . Известно, что процентная ставка  $r$  рассчитывается как  $r = f'(k)$  и ставка заработной платы  $w$  напрямую зависит от  $k$ ; конечно:  $w = f(k) - kf'(k) = w(k)$ . Доход на душу населения  $y$  рассчитывается как  $y = f(k) + rz = w + ra$ . Тогда граница цен фактора обозначается функцией  $d(r)$ , из которого следует:

$$dw/dr = dw/dw = \phi'(r) = -k \quad (5)$$

Рассмотрим небольшое изменение процентной ставки,  $r$ . Из (5) и (6) ясно, что

$$dy/dr = dw/dr + \alpha = \phi'(r) = -k + \alpha = z \quad (6)$$

В этом случае изменение дохода на душу населения равно избыточному предложению капитала. Если страна является страной-экспортером капитала, то более высокая процентная ставка делает ее лучше; если страна является страной-импортером капитала, более низкая процентная ставка делает ее более выгодной. Аналогичный результат достигается в работе Roy, J.

Ruffin [15, с.123–135]. В модели Р. Солоу равновесие достигается, когда  $sy = na$ , где  $s$  часть сэкономленного дохода. Для небольшой страны доход определяется  $y = \phi(r) + ra$ . Таким образом,  $s = [\phi(r) + ra] - na = 0$

Дифференцирование по  $r$  показывает, что  $\partial a/\partial r = sz/(n - sr)$ , где  $n - sr > 0$  – условие устойчивости модели R. Solow [1, с. 65–94; 15, с. 123–135]. Это фундаментальное уравнение для страны, экспортирующей капитал, где  $z > 0$ .

Более высокая процентная ставка повышает запас капитала; для страны-импортера капитала, где  $z < 0$ , более низкая процентная ставка повышает ее запас капитала. Поскольку  $sy = na$ , то улучшение условий торговли повышает доход на душу населения как для страны, экспортирующей капитал, так и для страны, импортирующей капитал.

Из этого следует, что мобильность свободного капитала улучшает доход на душу населения как в краткосрочной, так и в долгосрочной перспективе. В краткосрочной перспективе улучшение условий торговли повышает доход на душу населения по обычным причинам.

### Модель перекрывающихся поколений

Другим важным аспектом модификации модели Р. Солоу является модель перекрывающихся поколений, т. е. такая экономическая ситуация, в которой каждое поколение живет ровно два периода. При этом соблюдаются следующие основные условия. Для каждого человека, рожденного в поколении  $t$ ,  $(1 + n)$  человек рождается в поколении  $(t + 1)$ . Скорость роста  $n$  постоянна. Каждый человек работает в первом периоде жизни и уходит на пенсию во втором периоде. В молодости он зарабатывает заработную плату, потребляет ее часть и откладывает на старость. В старости потребитель живет исключительно за счет своих сбережений. Для простоты предполагается, что люди, рожденные в одном поколении, точно такие же, как люди, рожденные в любом другом поколении. Размер сбережений зависит от уровня доходов физических лиц в первый период и процентной ставки во второй период. Обозначим через  $w$  коэффициент заработной платы,  $r$  валовую прибыль на один доллар, сэкономленную за один период, потребление  $c_1$  в первом периоде и потребление  $c_2$  во втором периоде жизни. Каждый

человек максимизирует себя  $u = u(c_1, c_2)$  при условии  $w - c_1 = c_2/r$ . Первое условие:  $u_1/u_2 = r$ , где  $u_i = \partial u_i/\partial c_i$ . Тогда сбережения являются функцией  $w$  и  $r$ :

$$S(wr) \equiv w - c_1(w, r) \quad (7)$$

Поскольку сбережения обязательно являются положительными, увеличение валовой процентной ставки оказывает положительное влияние на благосостояние, которое увеличивает текущее потребление и снижает текущие сбережения. Процентная ставка будет иметь неоднозначное влияние на сбережения. Если потребление в оба периода нормальное, увеличение заработной платы приведет к увеличению сбережений, но предельная склонность к сбережениям будет меньше единицы. Таким образом:

$1 > (1 - S_w) > 0$ . Знак  $S$ , может быть положительным или отрицательным. Косвенная функция полезности выражается формулой:  $v(w, r) = u(c_1(w, r), c_2(w, r))$ . Если дифференцировать эту формулу, то получим следующее уравнение:  $v_w = u_2 r$ ;  $v_r = u_2 S$ .

Из представленных модификаций с модели перекрывающихся поколений следует вывод: более высокая заработная плата прямо пропорциональна процентной ставке; более высокая процентная ставка прямо пропорциональна сбережениям. Фактором пропорциональности в каждом случае является предельная полезность потребления при выходе индивидуума на пенсию.

### Расширение модели Solow с учетом потребности в капитале

В рамках данной модификации предполагается, что объем производства однороден и может либо потребляться, либо сохраняться как капитал. Как и прежде,  $f(k)$  является интенсивной формой производственной функции. Капитал полностью обесценивается через один период.

Таким образом, если капитал является производительным, то  $f'(k) = r > 1$ , где  $r$  – это процентная ставка. Сумма капитала в период  $t + 1$  состоит из сбережений молодых работников поколения  $t$ .

Пусть  $r_{t+1}$  обозначает процентную ставку по сбережениям поколения  $t$ , которые приносят плоды в следующем периоде. Заработная плата и процентная ставка, с которыми сталкивается представительный член поколения  $t$ :

$$w_t = f(k_t) - k f'(k_t) \quad (8)$$

$$r_{t+1} = k f'(k_{t+1}) \quad (9)$$

Сбережения каждого поколения  $t$  работника связаны с капиталом на одного работника следующего периода следующим образом:

$$S(w_t, r_{t+1}) = w_t + c_{1t} = k_{t+1}(1 + n) \quad (10)$$

Уравнения (18) – (20) определяют эволюцию экономики во времени. Устойчивое долгосрочное равновесие – это последовательность мгновенных равновесий, в которых процентные ставки и заработная плата постоянны во времени. В стационарном решении уравнение (20)

сводится к:  $S(w(k), r(k)) = k(1 + n)$  / Таким образом, условие устойчивости может быть представлено в следующем виде [16, с. 1126–50]:

$$S_w dw/dk + S_r dr/dk = f''(k)(S_r - k S_w) < (1 + n) \quad (11)$$

При этом предположение о том, что  $0 < S_w < 1$ , и предположение о том, что увеличение процентной ставки увеличивает сбережения  $S_r > 0$ , недостаточно для обеспечения стабильности роста экономики.

### Основная и расширенная модель Solow-CD

Другим направлением развития экономической теории роста является модель *MRW*, которая, используя базовую модель роста Р. Солоу, в которой совокупный объем производства в

стране  $i$  ( $Y_i$ ), определяется производственной функцией  $CD$  (Кобба–Дугласа), принимая в качестве аргументов запас физического капитала ( $K_i$ ) и человеческого капитала на соответствующей технологической основе ( $AL_i$ ), в соответствии с формулой:

$$Y_i = K_i^\alpha (AL_i)^{1-\alpha}, \quad (12)$$

где  $\alpha \in (0,1)$  – доля капитала, а  $A$  и  $L$  растут экзогенно со скоростью  $g$  и  $n$  соответственно. При этом каждая страна накапливает физический капитал в соответствии с уравнением роста:

$$dK_i/dt = s_{ik}Y_i - \delta K_i, \quad (13)$$

где  $s_{ik}$  – норма сбережений;  $\delta$  – норма амортизации капитала. После логарифмизации и наложения кросс-коэффициентных ограничений на  $\alpha$  получается основное уравнение *Солоу-CD*:

$$\ln\left(\frac{Y_i}{L_i}\right) = \ln A(0) + gt + \frac{\alpha}{1-\alpha} \ln\left(\frac{s_{ik}}{n_i+g+\delta}\right). \quad (14)$$

Следует отметить, что чрезмерно высокая оценка в модели *MRW* доли капитала  $\alpha$  инициировала необходимость интегрировать в базовую модель человеческий капитал ( $H_i$ ) в качестве дополнительного фактора производства. В этом случае выход в расширенную модель определяется производственной функцией  $CD$  (Кобба–Дугласа) следующего вида:

$$Y_i = K_i^\alpha H_i^\beta (AL_i)^{1-\alpha-\beta}, \quad (15)$$

где  $\alpha \in (0,1)$  – доля физического капитала, а  $\beta \in (0,1)$  – доля человеческого капитала.

Уравнения накопления физического и человеческого капитала имеют вид:  $dK_i/dt = s_{ik}Y_i - \delta K_i$  и  $dH_i/dt = s_{ih}H_i - \delta H_i$ . Соответственно,  $s_{ik}$  – это доля дохода, вложенного в физический капитал;  $s_{ih}$  – доля дохода, вложенная в человеческий капитал, и  $\delta$  является общей нормой амортизации.

В результате логарифмирования и наложения перекрестных ограничений на  $\alpha$  и  $\beta$  получается расширенное уравнение *Солоу-CD* следующего вида:

$$\ln\left(\frac{Y_i}{L_i}\right) = \ln A(0) + gt + \frac{\alpha}{1-\alpha-\beta} \ln\left(\frac{s_{ik}}{n_i+g+\delta}\right) + \frac{\beta}{1-\alpha-\beta} \ln\left(\frac{s_{ih}}{n_i+g+\delta}\right). \quad (16)$$

### Модифицированная модель Solow-CES

Далее рассмотрим модифицированную модель *Solow-CES*, т. е. *CES* спецификацию модели роста Р. Солоу. В этом случае производственная функция становится формализуется следующим образом:

$$Y_i = \left[ \alpha K_i^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha)(AL_i)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}, \quad (17)$$

где  $\alpha \in (0,1)$  – это то, что Arrow et al. [17, с. 225–250] называют параметром «распределения» (а не доли) физического капитала, а  $\sigma \geq 0$  является эластичностью замещения между капиталом и технологическим трудом.

Хорошо известно, что при  $\sigma = 0$  производственная функция *CES* сводится к функции *CD*. Предполагая, что эволюция капитала регулируется тем же уравнением роста, что и в *MRW*, то можно вывести следующую формулу:

$$Y_i^* = \left[ \frac{1}{1-\alpha} - \frac{\alpha}{1-\alpha} \left( \frac{s_{ik}}{n_i+g+\delta} \right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right]^{-\frac{\sigma}{\sigma-1}} \quad (18)$$

Линеаризация с использованием разложения в ряд Тейлора второго порядка вокруг  $\sigma = 1$ , как и в работе J. Kmenta [18, с. 180–189], дает основное уравнение *Солоу-CES*:

$$\ln \left( \frac{Y_i}{L_i} \right) = \ln A(0) + gt + \frac{\alpha}{1-\alpha} \ln \left( \frac{s_{ik}}{n_i+g+\delta} \right) + \frac{1}{2} \frac{\sigma-1}{\sigma} \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2} \left[ \ln \left( \frac{s_{ih}}{n_i+g+\delta} \right) \right]^2 \quad (19)$$

Аппроксимация функции *CES*, заданной уравнением (2.4), состоит из двух аддитивных членов: линейного члена  $\ln A(0) + gt + \frac{\alpha}{1-\alpha} \ln \left( \frac{s_{ik}}{n_i+g+\delta} \right)$  – линейного приближения функции *CES* первого порядка, соответствующее функции *CD* и квадратичного члена  $\frac{1}{2} \frac{\sigma-1}{\sigma} \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2} \left[ \ln \left( \frac{s_{ih}}{n_i+g+\delta} \right) \right]^2$

Человеческий капитал включается в функцию совокупного производства *CES* следующим образом:

$$Y_i = \left[ \alpha K_i^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \beta H_i^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha-\beta)(AL_i)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \quad (20)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  – параметры распределения;  $H$  – запас человеческого капитала и  $\sigma$  является эластичностью замещения между любыми двумя факторами производства ( $\sigma = \sigma_{j,k}$  для  $j \neq k$ , где  $j; k = K, H, AL$ ). Принимая те же уравнения для физического и человеческого капитала, что и в расширенной модели *Солоу-CD*, получаем выход на дополнительный труд, следующего вида:

$$Y_i^* = \left[ \frac{1}{1-\alpha-\beta} - \frac{\alpha}{1-\alpha-\beta} \left( \frac{s_{ik}}{n_i+g+\delta} \right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} - \frac{\beta}{1-\alpha-\beta} \left( \frac{s_{ih}}{n_i+g+\delta} \right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right]^{-\frac{\sigma}{\sigma-1}} \quad (21)$$

Линеаризация уравнения второго порядка (21) при  $\sigma = 1$  дает расширенное уравнение *Солоу-CES*:

$$\begin{aligned} \ln \left( \frac{Y_i}{L_i} \right) &= \ln A(0) + gt + \frac{\alpha}{1-\alpha-\beta} \ln \left( \frac{s_{ik}}{n_i+g+\delta} \right) + \frac{\beta}{1-\alpha-\beta} \ln \left( \frac{s_{ih}}{n_i+g+\delta} \right) \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\sigma-1}{\sigma} \frac{\alpha}{(1-\alpha-\beta)^2} \left\{ \alpha \left[ \ln \left( \frac{s_{ik}}{n_i+g+\delta} \right) \right]^2 + \beta \left[ \ln \left( \frac{s_{ih}}{n_i+g+\delta} \right) \right]^2 \right\} - \frac{1}{2} \frac{\sigma-1}{\sigma} \frac{\alpha}{(1-\alpha-\beta)^2} \\ &\quad \left\{ \alpha \beta \left[ \ln \left( \frac{s_{ik}}{s_{ih}} \right) \right]^2 \right\} \end{aligned} \quad (22)$$

**Заключение.** Рассмотренные теоретико-методологические подходы к моделированию

устойчивого роста экономики на основе модификации уравнения R. Solow–T. Swana позволяют сформировать новые эмпирические обоснования направлениям повышения эффективности системы регулирования социально-экономического развития региона. В частности, на основе неоклассической модели роста разработаны предложения по эффективному управлению социально-экономическим развитием российских регионов [19, с. 56–67; 20, с. 225–246; 21, с. 322–331; 22, с. 137–143].

#### Литература

1. Solow, R. M. *A Contribution to the Theory of Economic Growth* // *Quarterly Journal of Economics*. 1956. No.70. P. 65–94.
2. Swan, T.W. *Economic Growth and Capital Accumulation* // *Economic Record*. 1956. No. 32. November. P. 334–361.
3. Brock, W. and Durlauf, S. *Growth Economics and Reality* : working paper. – Department of Economics, University of Wisconsin, 2000.
4. Collier, P., and Gunning, J. W. *Explaining African Economic Performance* // *Journal of Economic Literature*. 1999. No. 37. P. 64–111.
5. Durlauf, S. *Manifesto for a Growth Econometrics* // *Journal of Econometrics*. 2001. No. 100. P. 65–69.
6. Durlauf, S. and Johnson, P. *Multiple Regimes and Cross-Country Growth Behavior* // *Journal of Applied Econometrics*. 1995. No.10. P. 365–84.
7. Liu, C. and Stengos, T. *Non-Linearities in Cross-Country Growth Regressions : A Semi-parametric Approach* // *Journal of Applied Econometrics*. 1999. No. 14. P. 527–538.
8. Durlauf, S., Kourtellos, A. and Minkin, A. *The Local Solow Growth Model* // *European Economic Review*. 2001. No.45. P. 928–940.
9. Kourtellos A. *Modelling Coefficient Heterogeneity in Cross-Country Growth Regression Models* : working paper. – Department of Economics, University of Wisconsin, 2001.
10. Azariadis, C. *The Theory of Poverty Traps : What Have We Learned?* : working paper // Department of Economics, UCLA. 2001.
11. Durlauf, S. *Nonergodic Economic Growth* // *Review of Economic Studies*. 1993. No. 60. P. 349–366.
12. Galor, O. and Zeira, J. *Income Distribution and Macroeconomics* // *Review of Economic Studies*. 1993. No. 60. P. 35–52.
13. Durlauf, S. and Quah, D. *the New Empirics of Economic Growth : Handbook of Macroeconomics* ; eds. Taylor J.B. and M. Woodford. 1999. Vol. 1. Ch.4. P. 235–308.
14. Barro, R. and Sala-i-Martin, X. *Economic Growth*. – MA : The MIT Press, Cambridge, 2004. P. 434.
15. Ruffin, R. J., Yoon, Y. D. *International Capital Movements in the Solow and Overlapping Generations Growth Models* // *Review of International Economics*. 1993. No. 1(2). P.123–135.
16. Diamond, P. A. *National Debt in a Neoclassical Growth Model* // *American Economic Review*. 1965. No. 55. P. 1126–50.
17. Arrow, K. J., Chenery, H.B., Minhas, B. S. and Solow, R.M. *Capital-Labor Substitution and Economic Efficiency* // *Review of Economics and Statistics*. 1961. No. 43. P. 225–250.
18. Kmenta, J. *On Estimation of the CES Production Function* // *International Economic Review*. 1967. No. 8. P. 180–189.
19. Акаев, А. А., Соколов, В. Н., Акаева, Б. А., Сарыгулов, А. И. *Асимптотические модели для прогнозирования долгосрочной демографической и экономической динамики* // *Экономика и математические методы*. 2011. Т. 47. № 3. С. 56–67.
20. Гичиев, Н. С. *Экономический рост макрорегиона : детерминанты региональной торговой интеграции и социально-экономического развития : монография / Н.С. Гичиев. РАН; Дагестан. науч. центр: Ин-т соц.-экон. исследований. – М. : Перо, 2016.*
21. Гичиев, Н. С., Суракатов, Н. С. *Внешиэкономическая интеграция субъектов Северо-Кавказского федерального округа : эконометрическое моделирование взаимосвязи параметров внешней торговли и инвестиционного потенциала региона* // *Региональные проблемы преобразования экономики*. 2011. № 4 (30). С. 322–331.
22. Хацкевич, В. Л. *Об устойчивости модифицированной модели Рамсея–Солоу, учитывающей запаздывание при вводе фондов* // *Экономика и математические методы*. 2009. Т. 46. № 3. С. 137–143.

#### References:

1. Solow, R. M. *A Contribution to the Theory of Economic Growth* // *Quarterly Journal of Economics*. 1956. No.70. P. 65–94.
2. Swan, T.W. *Economic Growth and Capital Accumulation* // *Economic Record*. 1956. No. 32. November. P. 334–361.
3. Brock, W. and Durlauf, S. *Growth Economics and Reality* : working paper. – Department of Economics, University of Wisconsin, 2000.
4. Collier, P., and Gunning, J. W. *Explaining African Economic Performance* // *Journal of Economic Literature*. 1999. No. 37. P. 64–111.
5. Durlauf, S. *Manifesto for a Growth Econometrics* // *Journal of Econometrics*. 2001. No. 100. P. 65–69.
6. Durlauf, S. and Johnson, P. *Multiple Regimes and Cross-Country Growth Behavior* // *Journal of Applied Econometrics*. 1995. No.10. P. 365–84.
7. Liu, C. and Stengos, T. *Non-Linearities in Cross-Country Growth Regressions : A Semi-parametric Ap-*

- proach // Journal of Applied Econometrics. 1999. No. 14. P. 527–538.*
8. Durlauf, S., Kourtellos, A. and Minkin, A. *The Local Solow Growth Model // European Economic Review. 2001. No.45. P. 928–940.*
9. Kourtellos A. *Modelling Coefficient Heterogeneity in Cross-Country Growth Regression Models : working paper. – Department of Economics, University of Wisconsin, 2001.*
10. Azariadis, C. *The Theory of Poverty Traps : What Have We Learned? : working paper // Department of Economics, UCLA. 2001.*
11. Durlauf, S. *Nonergodic Economic Growth // Review of Economic Studies. 1993. No. 60. P. 349–366.*
12. Galor, O. and Zeira, J. *Income Distribution and Macroeconomics // Review of Economic Studies. 1993. No. 60. P. 35–52.*
13. Durlauf, S. and Quah, D. *the New Empirics of Economic Growth : Handbook of Macroeconomics ; eds. Taylor J.B. and M. Woodford. 1999. Vol. 1. Ch.4. P. 235–308.*
14. Barro, R. and Sala-i-Martin, X. *Economic Growth. – MA : The MIT Press, Cambridge, 2004. P. 434.*
15. Ruffin, R. J., Yoon, Y. D. *International Capital Movements in the Solow and Overlapping Generations Growth Models // Review of International Economics. 1993. No. 1(2). P.123–135.*
16. Diamond, P. A. *National Debt in a Neoclassical Growth Model // American Economic Review. 1965. No. 55. P. 1126–50.*
17. Arrow, K. J., Chenery, H.B., Minhas, B. S. and Solow, R.M. *Capital-Labor Substitution and Economic Efficiency // Review of Economics and Statistics. 1961. No. 43. P. 225–250.*
18. Kmenta, J. *On Estimation of the CES Production Function // International Economic Review. 1967. No. 8. P. 180–189.*
19. Akaev, A. A., Sokolov, V. N., Akaeva, B. A., Sarygulov, A. I. *Asimptoticheskie modeli dlya prognozirovaniya dolgosrochnoj demograficheskoj i ekonomicheskoj dinamiki // Ekonomika i matematicheskie metody. 2011. T. 47. № 3. S. 56–67.*
20. Gichiev, N. S. *Ekonomicheskij rost makroregiona : determinanty regional'noj torgovoj integracii i social'no-ekonomicheskogo razvitiya : monografiya / N.S. Gichiev. RAN; Dagestan. nauch. centr: In-t soc.-ekon. issledovanij. – M. : Pero, 2016.*
21. Gichiev, N. S., Surakatov, N. S. *Vneshneekonomicheskaya integraciya sub'ktov Severo-Kavkazskogo federal'nogo okruga : ekonometricheskoe modelirovanie vzaimosvyazi parametrov vneshnej torgovli i investicionnogo potenciala regiona // Regional'nye problemy preobrazovaniya ekonomiki. 2011. № 4 (30). S. 322–331.*
22. Hachevich, V. L. *Ob ustojchivosti modificirovannoj modeli Ramseya–Solou, uchityvayushchej zapazdyvanie pri vvode fondov // Ekonomika i matematicheskie metody. 2009. T. 46. № 3. S. 137–143.*